

Title	多元体 (Divisions algebra) ノ賦値 (Bewertung) ニツイテ
Author(s)	守屋, 美賀雄
Citation	全国紙上数学談話会. 93 p.6-p.14
Issue Date	1936-06-12
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74342
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

417. 多元体 (divisions algebra) , 賦値 (Bewertung) = ツイテ

守屋 美 嶺 雄 (北大)

K がアル可換体デ且ツ賦値付ケラレテ (bewertet) 居
ルトキ, $K =$ 爾スル代数的拡大体 $K =$ 於テ K の *Bewertung*
が保持サレテ居ル様ナ *Bewertung* が存在スルカドウカ、
又存在スルトキハコレが如何様ニシテ定メラレルカト云フ問
題ハ賦値論ニ於ケル一ツノ重要ナ問題デアリ之レニ関シテハ
A. Ostrowski ノ系統的ナ研究ガアル (*Untersuchungen
zur arithmetischen Theorie der Körper, Math.
Zeit. Bd. 39 (1935)*).

所ガ一方 Hasse ハ Hensel ノ p -進数体ヲ基礎体ニ
有スル有限階ノ多元体ヲ取り扱ツタ際ニコノ多元体ニ基礎体
ノ賦値ヲ保持スルマウナ賦値ヲ映ヘルコトニ成功シテ居ル
(Über p -adische Schiefkörper und ihre Bedeu-
tung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahl-
systeme *Math. Ann. Bd. 104 (1931)*) 元來 Hensel ,
 p -進数体トイフノハ之レヲ賦値論ノ立場カラ見レバ、アル

ーッノ *diskrete Bewertung* = 関スル完全体 (*perfekter Körper*) ノコトデアル。ソコデ今、自余ハ次ノコトヲ問題ニシテ見タイト思フ。

k ガ *diskrete Bewertung* = 関レテ完全体トイフ様ナ特殊ナモノデアナク、モウ少マ一般化ナ性質ヲ有スル賦値付ケラレタ *Körper* トスルトキ、コレヲ基礎体 = 有スル有限階ノ多元体 $= k$ ノ賦値ノ接続 (k ノ賦値ヲ継持スルモノヲ賦値ノコト) ヲ求メルコトが出来ルカ? 又求メルコトが出来タトスレバ如何ニシテコレヲ定ムヤキカ? コノ問題ヲ取扱フタメ =

第一. 基礎体 k (標数ハ常ニ 0) = ハ次ノ様ナ *Exponentenbewertung* φ ガ映ヘラレテキル。

1. $a \in k$ = 對レテ $\varphi(a)$ ハ a = 体ッテ一意的ニ定マル実数 $\varphi(0) = \infty$ 且ツ又適當ナ k ノ元 a = 對シテハ $\varphi(a) > 0$ ナラシムルコトが出来ル。

2. $a, b \in k$ = 對シテ $\varphi(ab) = \varphi(a) + \varphi(b)$

3. $a, b \in k$ = 對シテ $\varphi(a+b) \geq \min(\varphi(a), \varphi(b))$.

k ノ元 a ガ $\varphi(a) \geq 0$ ナル性質ヲ有スルトキ a ヲ k ノ整元ト呼び特ニ $\varphi(a) = 0$ ナラバ a ヲ k ノ單位元トイフコトニスル。

第二. k ハ φ = 関シテ relativ perfekten Körper デアル、即チ

k ノ整元ヲ係数ニ持ツ x ノ多項式

$$h(x) = a_0 x^r + \dots + a_v$$

= 於テ少クトモ、アルーツノ x^i ノ係数が単位元 (但シ $0 < i < r$)
 デ且ツ $\varphi(a_r) > 0$ ナラバ $h(x)$ ハ k = 於テ可約 (reduzibel)
 デアル。

k が *relativ perfekten Körper* デアルトキ = ハ
 次ノ諸定理が成立スル。(何レモ Ostrowski ノ前述ノ論
 文参照、但シ Ostrowski ノ論文デハ *Bewertung* が
Exponenten-bewertung デナク Kürschák ノ定義 =
 ヨル *Bewertung* デアル！)

$$I. \quad h(x) = a_0 x^r + \dots + a_r$$

ヲ整係数ヲ有スル k ノ既約多項式トスルト

$$\varphi(a_i) \geq \min(\varphi(a_0), \varphi(a_r)) \quad \text{但シ } r > i > 0.$$

II. k ノ代数的拡大体 $K = k^*$ = 常 = φ ノ接続が存在
 スル。

即チ、 K ノ任意ノ元 γ が k = 於ケルーツノ既約方程式

$$x^r + a_1 x^{r-1} + \dots + a_r = 0$$

ノ根ナルトキハ γ ノ賦値トシテ $\frac{1}{r} \varphi(a_r)$ ヲ與ヘレバヨイ。

III. II = 於テ定メラレタ K ノ賦値が K = 於ケル唯一ノ φ
 ノ接続デアル。

サテ *relativ perfekte Körper* ノ例トシテ何ガア
 ルカトイヘバ

1. φ = 閉スル完全体

2. k ノ中ニ φ = 閉スルーツノ完全体 k_0 が存在シ且ツ

k ハ k_0 = 閉スル有限次ノ拡大体 $k_1 < k_2 < \dots$

$\dots < k_j < \dots$ ノ併合体 (Vereinigungskörper)

トシテ定義サレテキル (拙著 *Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades*. 北大. 理学部紀要三卷 (1935)) 倣デアル。

次 = $k(\text{relativ perfekten Körper})$ 基礎体 = 有スル有限階ノ多元体 D ラトル。今, D ノ k = 關スル階数ヲ凡トスル。

D = 對シテ次ノ三性質ヲ有スル函数 Φ が決ヘラレテ居レトキ、 D ヲ“賦値付ケラレテ居ル”ト云ヒ Φ ヲ D ノ賦値ト云フ。

1. $\alpha \in D$ = 對シテ $\Phi(\alpha)$ ハ α = 依ツテ_L 意的 = 定マ_L 實數

$\Phi(0) = \infty$, 且ツ又適當ナ D ノ元 α = 對シテハ $\Phi(\alpha) \neq 0$ トナル。

2. $\Phi(\alpha\beta)\Phi(\alpha) + \Phi(\beta) = \Phi(\beta\alpha)$

3. $\Phi(\alpha + \beta) \geq \text{Min}(\Phi(\alpha), \Phi(\beta))$

以上ノ三ツノ條件ヨリ

i) $\Phi(1) = \Phi(-1) = 0$

ii) $\Phi(\alpha + \beta) = \text{Min}(\Phi(\alpha), \Phi(\beta))$

特 = k , 任意ノ元 a = 對シテ

$\Phi(a) = \varphi(a) + \nu$

Φ ヲ φ ノ接続ト呼ブコト = スル。

§1. D ノ賦値 Φ ガ φ ノ接続ナルトキ Φ ハ φ = 依テ如何様 = 定メラレルカ?

D ノ任意ノ元ヲ α トスルトキ, α ハ k ノ元ヲ係數 = 有ス

ル次ノ様ナ k , 既約方程式ノ根ニナル。

$$f(x) = x^m + a, x^{m-1} + \dots + a_m = 0$$

$$[f(x) \wedge \alpha = \text{依テ一意的ニ定マル}]$$

依ツテ D ハ $k(\alpha)$ ナル k = 関シテ m 次ノ代数体ヲ含ム。
サテ Φ ハコノ場合 $k(\alpha)$ = 於ケル φ ノ接統賦値 トナルカラ
明ラカニ

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{m} \varphi(a_m)$$

デアラウ。(II 及ビ III = 依ル) . サテ今, α ノ k = 関スル
正規表現ヲ A トスレバ α ノ指標方程式 (characteristische
Gleichung)

$$|x E - A| = F(x) = 0 \text{ ハ } n \text{ 次ノ方程式デ且ツヨク知ラ}$$

レテ居ル如ク

$$F(x) = |f(x)|^{\frac{n}{m}}$$

$$\text{依テ明ラカニ } a_m^{\frac{n}{m}} = (-1)^n |A|$$

$$\text{即チ } \Phi(\alpha) = \frac{1}{m} \varphi(a_m) = \frac{1}{n} \varphi(|A|).$$

今簡單ニ $|A|$ ヲ α ノ Norm ト呼バコトニスル: $|A| = N(\alpha)$

サテ k ノ有スル性質カラシテ $k(\alpha)$ = 於ケル φ ノ接統ハ唯一ツデアルカラ

$\Phi(\alpha) = \frac{N(\alpha)}{n}$ ガ D = 於ケル唯一ツノ φ ノ接統デア
ル。

§ 2. $D = k$ ノ賦値 φ ノ接統ヲ與ヘルコト。

D ノ任意ノ元 α ノ Norm ヲ $|A|$ トスルトキ

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{n} \varphi(|A|)$$

ト定義スル、コノ様ニシテ定メラレタ Φ ガ實際ニ D ノ賦値

トナルコトヲ示サウ。

1. $\Phi(\alpha)$ の定義 = ヨリ明ラカ = α = 依ッテ一意的 = 定マル實数。

尚 $a \in \mathcal{K}$ ナルトキハ $|A| = a^n$ 依ッテ

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{n} \varphi(a^n) = \varphi(a)$$

特ニ $a=0$ ナラバ $\Phi(0)=\infty$, ス \mathcal{K} , 適當ナ元 a = 對シテ

$$\Phi(a) = \varphi(a) \neq 0$$

ナラシムルコトガ出來ル。

2. $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ トスルトキ $|A|, |B|$ ガ夫々 α, β , Norm ナラバ

$\alpha\beta$, Norm ハ明ラカ = $|A| \cdot |B|$ 依ッテ

$$\Phi(\alpha\beta) = \frac{1}{n} \varphi(|A| |B|) = \frac{1}{n} \varphi(|A|) + \frac{1}{n} \varphi(|B|) = \Phi(\alpha) + \Phi(\beta)$$

3. $\Phi(\alpha + \beta) \geq \min(\Phi(\alpha), \Phi(\beta))$.

ソレニハ今、 $\Phi(\alpha) \geq \Phi(\beta)$ ($\Phi(\beta) > \Phi(\alpha)$, トキモ同様)

トスレバ

$$(\alpha\beta^{-1} + 1)\beta = \alpha + \beta$$

且ツ $\Phi(\alpha\beta^{-1}) \geq 0$

$\alpha\beta^{-1}$ ノ満足スル \mathcal{K} = 於ケル既約方程式ヲ $f(x) = x^n + a_1 x^{(n-1)}$
+ + a_m トスルト $\alpha\beta^{-1}$, Norm ハ $(-1)^n a_m^{\frac{n}{m}} = |AB^{-1}|$

デアルカラ

$$\Phi(\alpha\beta^{-1}) = \frac{1}{n} \varphi(|AB^{-1}|) \geq 0 \quad \text{ヨリ} \quad \varphi(a_m) \geq 0 \quad \text{トナラナ}$$

クテハナラヌ。

且ヌ. $\varphi(1) = 0$ デアルカラ

I = 依ッテ

$$a_1, \dots, a_{m-1}$$

ハ悉ク k の整元デナケレバナラナイ。

サテ今、 $y = 1+x$ トシテ、 $f(x) =$ 代入スルト

$$f(y-1) = y^m + \dots + (a_m - a_{m-1} + \dots + (-1)^m 1)$$

$$\text{トナリ、} \varphi(1+\alpha\beta^{-1}) = \frac{1}{\pi} \varphi(a_m - a_{m-1} + \dots + (-1)^m) \geq 0$$

($a_m, \dots, (-1)^m$ ハ悉ク k の整元ナル故) 依ッテ

$$\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha\beta^{-1}+1) + \varphi(\beta) \geq \varphi(\beta)$$

$$\text{即チ} \quad \varphi(\alpha+\beta) \geq \min(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$$

既ニ証明セラレタ如ク φ ハ φ の接続デアル。

依ッテ次、事実カ証明セラレタ。

k 上賦値 φ = 関スル *relativ perfekter Körper*

D. k 上基礎体 = 有スル n 階ノ多元体 $\alpha \in D$ 、 k = 於ケル正規表現ヲ A トスル

D = ハ常ニ唯一ツノ k 上賦値ノ接続カ存在シ、ソレハ

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{n} \varphi(|A|)$$

ヲ求メラレル。

§3. Derivierte Divisionsalgebren

基礎体 k (*relativ perfekter Körper*) = 関シテ n 階ノ多元体 D ハ上記ノ議論デ k 上接続賦値 φ ヲ有スルコトヲ知ツタ、ソコデ今度ハコノ賦値 φ = 関シテ D 中デ収斂トカ、基本列トカイフ概念ヲ定義ショウト思フ。

1. $\alpha_1, \dots, \alpha_n \dots$ ヲ D ノ元ヨリナル元列トスル

之レ = 對シテ D ノ適當ナ元 $\alpha =$ 對シテ

$$\varphi(\alpha - \alpha_n)$$

ガ凡ト共ニ如何程デモ大キクナルトキハ其ノ元列ガ $\alpha =$ 收斂
スルト云フ。

2. $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ フ D ノ元列トスル。

今 N フ大キクトレバ $m_1 > m_n > N$ ナル指數ニ對シ
テ

$$\varphi(\alpha_{m_1} - \alpha_{m_2})$$

ガ又如何程デモ大キクナリ得ルトキ

$\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ フ D ノ基本列ト云フ。

收斂スル D ノ元列ハ基本列デアアル。(逆ハ必ずしも成立シ
ナイ)

コレカラ先ハ可換体ニ於ケルト同様ニシテ

D ノスベテノ基本列ガ極限元ヲ有スル様ナ D ヲ含ム多元
体 D^* ヲツクルコトが出来ル。

又 D^* ニ於テハ D ノ賦値重 * ノ接續ガ存在シ D^* ハ重 *
関シテ完全デアアル。

即チ D^* ノ如何ナル基本列モ D^* ニ於テ極限元ヲ有ス
ル。

サテ、コノ様ナ D ヲ含ム完全多元体ノ中デ最小ナモノ
(同型ナルモノハ同一ナモノト見ナシテ)ガ存在スルガ、之
レヲ D ノ *derivierte Divisions algebra* トイヒ \overline{D} ヲ
以テアラハス。

次号ニハ基礎体ガ $\varphi =$ 関レテ特ニ *perfekt* ナラバ D

がドナルカト云フコトヲ攻究シテ見ヨウト思フ。